Zwei-Stichproben-t-Test für unabhängige Stichproben

statistik-online.ch

Der **Zwei-Stichproben-t-Test für unabhängige Stichproben** prüft, ob sich die Mittelwerte von zwei unabhängigen Gruppen statistisch bedeutsam unterscheiden.

1 Grundidee

Wir vergleichen zwei beobachtete Gruppenmittelwerte miteinander.

Typische Fragestellung

Es liegen zwei unabhängige Stichproben vor. Wir möchten wissen, ob die Differenz der Mittelwerte gross genug ist, um gegen die Nullhypothese zu sprechen.

- Unterscheiden sich zwei Unterrichtsmethoden im Testergebnis?
- Ist die durchschnittliche Reaktionszeit in Gruppe A kleiner als in Gruppe B?
- Verdienen zwei Berufsgruppen im Durchschnitt unterschiedlich viel?

Wichtig: unabhängige Gruppen

Dieses Dokument behandelt den Zwei-Stichproben-t-Test für **unabhängige** Gruppen. Die Personen oder Beobachtungen in Gruppe 1 dürfen also nicht dieselben sein wie in Gruppe 2. Für verbundene oder gepaarte Stichproben wird ein gepaarter t-Test verwendet.

Situation	**Passender Test**	**Beispiel**
zwei unabhängige Gruppen	unabhängiger t-Test	Klasse A vs. Klasse B
dieselben Personen zweimal	gepaarter t-Test	vor und nach Training
eine Gruppe gegen Sollwert	Ein-Stichproben-t-Test	Mittelwert gegen 100

2 Hypothesen

Die Nullhypothese besagt, dass die Populationsmittelwerte gleich sind:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{oder} \qquad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Die Alternativhypothese hängt von der Fragestellung ab:

zweiseitig:	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	Unterschied in beide Richtungen
rechtsseitig:	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	Gruppe 1 hat den grösseren Mittelwert
linksseitig:	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	Gruppe 1 hat den kleineren Mittelwert

3 Teststatistik

In diesem Material verwenden wir den klassischen Zwei-Stichproben-t-Test für unabhängige Stichproben mit gleichen Varianzen. Dazu wird zuerst die gemeinsame Standardabweichung s_p berechnet.

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$SE = s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE}$$

Symbol	**Bedeutung**
$\bar{x}_1, \bar{x}_2$	Mittelwerte der beiden Stichproben
s_1, s_2	Standardabweichungen der beiden Stichproben
n_1, n_2	Stichprobengrössen
s_p	gepoolte Standardabweichung
SE	Standardfehler der Mittelwertsdifferenz
$df = n_1 + n_2 - 2$	Freiheitsgrade

Je weiter der berechnete t-Wert von 0 entfernt ist, desto stärker spricht die Stichprobe gegen gleiche Mittelwerte.

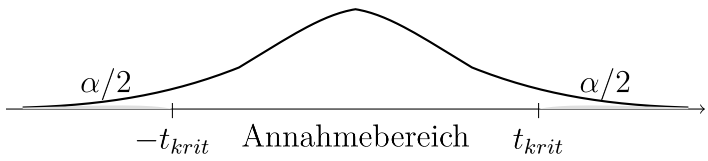
Hinweis: Welch-t-Test

Wenn die Varianzen der beiden Gruppen klar unterschiedlich sind, wird oft der Welch-t-Test verwendet. Dort wird s_p nicht berechnet und die Freiheitsgrade werden angepasst. Die Entscheidungslogik bleibt aber gleich: Der berechnete t-Wert wird mit einem kritischen t-Wert verglichen.

4 Entscheidungsregel

Die Entscheidung erfolgt ausschliesslich durch den Vergleich mit dem kritischen t-Wert t_{krit}.

Testart	**H_0 verwerfen, wenn ...**	**Ablehnungsbereich**
zweiseitig	$\|t\| > t_{krit}$	links und rechts
rechtsseitig	$t > t_{krit}$	rechts
linksseitig	$t < -t_{krit}$	links



5 Voraussetzungen

- Die abhängige Variable ist metrisch.
- Die beiden Gruppen sind unabhängig.
- Die Beobachtungen innerhalb jeder Gruppe sind unabhängig.
- Die Werte sind in beiden Populationen annähernd normalverteilt.
- Für den klassischen Test werden ähnliche Varianzen angenommen.

6 Kritische t-Werte

Der kritische t-Wert hängt von drei Informationen ab:

- dem Signifikanzniveau α,
- der Testart,
- den Freiheitsgraden $df = n_1 + n_2 - 2$.

df	**zweiseitig 5%**	**einseitig 5%**	**zweiseitig 1%**
19	2.093	1.729	2.861
24	2.064	1.711	2.797
28	2.048	1.701	2.763
36	2.028	1.688	2.719

7 Beispiel

Zwei unabhängige Gruppen schreiben denselben Test. Gruppe 1 hat $n_1 = 12$, $\bar{x}_1 = 78.4$, $s_1 = 8.0$. Gruppe 2 hat $n_2 = 14$, $\bar{x}_2 = 70.1$, $s_2 = 7.2$. Es wird zweiseitig mit $\alpha = 0.05$ getestet.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$s_p^2 = \frac{(12-1) \cdot 8.0^2 + (14-1) \cdot 7.2^2}{12 + 14 - 2} = 57.41$$

$$s_p = 7.58 \qquad SE = 7.58 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{14}} = 2.98$$

$$t = \frac{78.4 - 70.1}{2.98} = 2.78$$

Die Freiheitsgrade sind:

$$df = n_1 + n_2 - 2 = 12 + 14 - 2 = 24$$

Für einen zweiseitigen Test mit $df = 24$ und $\alpha = 0.05$ gilt ungefähr $t_{krit} = 2.064$. Da $|2.78| > 2.064$, wird H_0 verworfen.

Interpretation: Die Stichprobe spricht dafür, dass sich die beiden Gruppenmittelwerte unterscheiden.

8 Zusammenfassung

Schritt	Frage	Formel oder Entscheidung
1	Hypothesen	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
2	Gepoolte Varianz	$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$
3	Standardfehler	$SE = s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
4	Teststatistik	$t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/SE$
5	Freiheitsgrade	$df = n_1 + n_2 - 2$
6	Entscheidung	Vergleich mit t_{krit}

Aufgaben: Unabhängiger Zwei-Stichproben-t-Test

1 – Unterrichtsmethoden

Zwei unabhängige Klassen verwenden unterschiedliche Lernmethoden. Klasse 1 hat $n_1 = 16$, $\bar{x}_1 = 52.4$, $s_1 = 6.1$. Klasse 2 hat $n_2 = 14$, $\bar{x}_2 = 47.0$, $s_2 = 5.8$. Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 0.05$, ob sich die Mittelwerte unterscheiden.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie s_p, SE und den t-Wert.
- Bestimmen Sie t_{krit} und treffen Sie eine Entscheidung.

2 – Trainingsprogramm

Ein neues Trainingsprogramm soll zu höheren Punktzahlen führen. Gruppe 1 nutzt das neue Programm: $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 18.5$, $s_1 = 3.0$. Gruppe 2 nutzt das alte Programm: $n_2 = 11$, $\bar{x}_2 = 16.2$, $s_2 = 2.8$. Testen Sie rechtsseitig mit $\alpha = 0.05$.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den t-Wert.
- Interpretieren Sie das Ergebnis.

3 – Durchschnittswerte

Gruppe A hat $n_1 = 18$, $\bar{x}_1 = 101.2$, $s_1 = 10.5$. Gruppe B hat $n_2 = 20$, $\bar{x}_2 = 98.7$, $s_2 = 9.8$. Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 0.05$, ob sich die Mittelwerte unterscheiden.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie s_p, SE, t und df.
- Treffen Sie eine Entscheidung mit t_{krit}.

4 – Multiple Choice

Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrfachantworten möglich)

- ❑ Der Zwei-Stichproben-t-Test für unabhängige Stichproben vergleicht zwei unabhängige Mittelwerte.
- ❑ Beim klassischen Test sind die Freiheitsgrade $n_1 + n_2 - 2$.
- ❑ Bei einem zweiseitigen Test wird nur rechts abgelehnt.
- ❑ Der Standardfehler wird mit den Stichprobengrössen beider Gruppen berechnet.
- ❑ Wenn die Gruppen dieselben Personen vor und nach einer Messung enthalten, ist ein gepaarter t-Test passender.

Lösungen: Unabhängiger Zwei-Stichproben-t-Test

Lösung zu Aufgabe 1

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$s_p^2 = \frac{15 \cdot 6.1^2 + 13 \cdot 5.8^2}{16 + 14 - 2} = 35.55 \qquad s_p = 5.96$$

$$SE = 5.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{14}} = 2.18$$

$$t = \frac{52.4 - 47.0}{2.18} = 2.47$$

Die Freiheitsgrade sind $df = 16 + 14 - 2 = 28$. Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt ungefähr $t_{krit} = 2.048$.

$$|2.47| > 2.048$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Stichprobe spricht für einen Unterschied zwischen den beiden Unterrichtsmethoden.

Lösung zu Aufgabe 2

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$s_p^2 = \frac{9 \cdot 3.0^2 + 10 \cdot 2.8^2}{10 + 11 - 2} = 8.39 \qquad s_p = 2.90$$

$$SE = 2.90 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{11}} = 1.27$$

$$t = \frac{18.5 - 16.2}{1.27} = 1.82$$

Die Freiheitsgrade sind $df = 19$. Für einen rechtsseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt ungefähr $t_{krit} = 1.729$.

$$1.82 > 1.729$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Es gibt einen Hinweis darauf, dass das neue Trainingsprogramm zu höheren Punktzahlen führt.

Lösung zu Aufgabe 3

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$s_p^2 = \frac{17 \cdot 10.5^2 + 19 \cdot 9.8^2}{18 + 20 - 2} = 102.75 \qquad s_p = 10.14$$

$$SE = 10.14 \cdot \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{20}} = 3.29$$

$$t = \frac{101.2 - 98.7}{3.29} = 0.76$$

Die Freiheitsgrade sind $df = 18 + 20 - 2 = 36$. Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt ungefähr $t_{krit} = 2.028$.

$$|0.76| < 2.028$$

Entscheidung: H_0 wird nicht verworfen. Die Stichprobe liefert keinen ausreichenden Hinweis auf einen Unterschied der Mittelwerte.

Lösung zu Aufgabe 4

✓ Richtig – Der Test vergleicht zwei unabhängige Gruppenmittelwerte.

✓ Richtig – Beim klassischen Zwei-Stichproben-t-Test für unabhängige Stichproben gilt $df = n_1 + n_2 - 2$.

✗ Falsch – Beim zweiseitigen Test wird links und rechts abgelehnt.

✓ Richtig – Beide Stichprobengrössen gehen in den Standardfehler ein.

✓ Richtig – Bei verbundenen Messungen ist ein gepaarter t-Test passender.