Z-Transformation

statistik-online.ch

Die **Z-Transformation** wandelt einen Rohwert x in einen standardisierten Wert z um. Dadurch kann man Werte aus einer Normalverteilung mit der Standardnormalverteilung vergleichen.

1 Grundidee

Ein z-Wert sagt, wie viele Standardabweichungen ein Wert vom Mittelwert entfernt ist.

Die Standardnormalverteilung hat immer:

$$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$$

Ein positiver z-Wert liegt oberhalb des Mittelwerts, ein negativer z-Wert liegt unterhalb des Mittelwerts.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Symbol	Bedeutung
x	beobachteter Rohwert
μ	Mittelwert der Verteilung
σ	Standardabweichung der Verteilung
z	standardisierter Wert

Interpretation

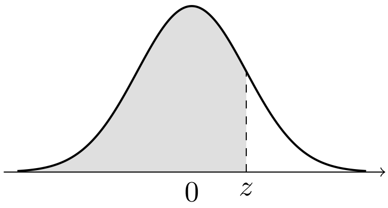
- $z = 0$: Der Wert liegt genau beim Mittelwert.
- $z = 1$: Der Wert liegt eine Standardabweichung oberhalb des Mittelwerts.
- $z = -2$: Der Wert liegt zwei Standardabweichungen unterhalb des Mittelwerts.

2 Wahrscheinlichkeiten mit der Z-Tabelle

In dieser Unterlage verwenden wir die Schreibweise:

$$P(Z \leq z)$$

Das bedeutet: **die Fläche links von** z unter der Standardnormalverteilung.



Viele Z-Tabellen geben genau diesen Wert an. Zum Beispiel:

$$P(Z \leq 1.00) = 0.8413$$

Das bedeutet: Etwa 84.13% der Werte liegen unterhalb von $z = 1.00$.

3 Fläche unterhalb eines Wertes

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert kleiner oder gleich einem bestimmten Rohwert ist:

$$P(X \leq x)$$

Vorgehen

1. Rohwert in z-Wert umwandeln.
2. In der Z-Tabelle $P(Z \leq z)$ nachschlagen.

Beispiel

Die Punkte in einem Test seien normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 115 Punkte zu erreichen?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{115 - 100}{15} = 1.00$$

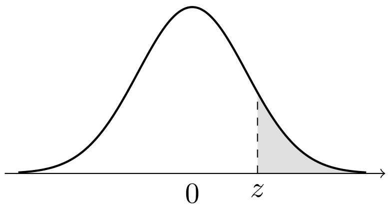
$$P(X \leq 115) = P(Z \leq 1.00) = 0.8413$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 84.13%.

4 Fläche oberhalb eines Wertes

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert grösser als ein bestimmter Rohwert ist:

$$P(X > x)$$



Da die gesamte Fläche unter der Kurve 1 beträgt, gilt:

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$$

Beispiel

Die Wartezeit sei normalverteilt mit $\mu = 50$ Minuten und $\sigma = 10$ Minuten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, länger als 62 Minuten zu warten?

$$z = \frac{62 - 50}{10} = 1.20$$

$$P(X > 62) = P(Z > 1.20) = 1 - P(Z \leq 1.20)$$

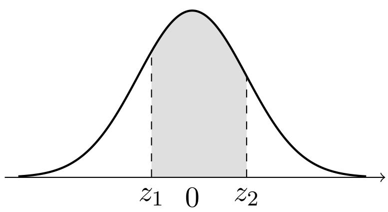
$$= 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 11.51%.

5 Fläche zwischen zwei Werten

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert zwischen zwei Rohwerten liegt:

$$P(a \leq X \leq b)$$



Dazu werden beide Rohwerte z-transformiert:

$$z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma} \qquad z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

Dann wird die linke Fläche bis z_1 von der linken Fläche bis z_2 abgezogen:

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$$

Beispiel

Eine Variable sei normalverteilt mit $\mu = 70$ und $\sigma = 8$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert zwischen 64 und 78 liegt?

$$z_1 = \frac{64 - 70}{8} = -0.75 \qquad z_2 = \frac{78 - 70}{8} = 1.00$$

$$P(64 \leq X \leq 78) = P(-0.75 \leq Z \leq 1.00)$$

$$= P(Z \leq 1.00) - P(Z \leq -0.75) = 0.8413 - 0.2266 = 0.6147$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 61.47%.

6 Verteilungen vergleichen

Rohwerte aus unterschiedlichen Verteilungen können nicht direkt verglichen werden, wenn Mittelwert und Standardabweichung unterschiedlich sind. Die Z-Transformation macht sie vergleichbar.

Beispiel

Eine Person erreicht in Test A 82 Punkte. In Test A gilt: $\mu_A = 70$, $\sigma_A = 10$.
In Test B erreicht dieselbe Person 108 Punkte. In Test B gilt: $\mu_B = 100$, $\sigma_B = 6$.

$$z_A = \frac{82 - 70}{10} = 1.20$$

$$z_B = \frac{108 - 100}{6} = 1.33$$

Interpretation: In Test B ist die Leistung relativ zur jeweiligen Verteilung höher, weil $z_B = 1.33$ grösser ist als $z_A = 1.20$.

7 Rücktransformation

Manchmal ist der z-Wert bekannt, aber der ursprüngliche Rohwert wird gesucht. Dafür wird die Z-Transformation nach x aufgelöst.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \mu + z \cdot \sigma$$

Symbol	Bedeutung
x	gesuchter Rohwert
μ	Mittelwert der Verteilung
σ	Standardabweichung der Verteilung
z	bekannter z-Wert

Beispiel

Eine Person hat einen z-Wert von -0.8. Der Mittelwert der Gruppe liegt bei 35 Punkten und die Standardabweichung bei 5 Punkten. Wie gross ist ihr Rohwert?

$$x = \mu + z \cdot \sigma = 35 + (-0.8) \cdot 5 = 35 - 4 = 31$$

Antwort: Die Person hat einen Rohwert von 31 Punkten.

8 Zusammenfassung

Fragestellung	**Gesucht**	**Rechnung**
unterhalb eines Wertes	$P(X \leq x)$	$P(Z \leq z)$
oberhalb eines Wertes	$P(X > x)$	$1 - P(Z \leq z)$
zwischen zwei Werten	$P(a \leq X \leq b)$	$P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$
Vergleich zweier Werte	relative Lage	z-Werte vergleichen
Rücktransformation	Rohwert x	$\mu + z \cdot \sigma$

9 Aufgaben

Aufgabe 1: Unterhalb eines Wertes

Die Körpergrösse sei normalverteilt mit $\mu = 170$ cm und $\sigma = 8$ cm. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 178 cm gross zu sein?

Aufgabe 2: Oberhalb eines Wertes

Die Bearbeitungszeit sei normalverteilt mit $\mu = 40$ Minuten und $\sigma = 5$ Minuten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 47.5 Minuten zu benötigen?

Aufgabe 3: Zwischen zwei Werten

Ein Testergebnis sei normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 12$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zwischen 88 und 118 Punkte zu erreichen?

Aufgabe 4: Vergleich zweier Verteilungen

Eine Person hat in Mathematik 78 Punkte. In Mathematik gilt: $\mu = 70$, $\sigma = 8$. In Deutsch hat dieselbe Person 84 Punkte. In Deutsch gilt: $\mu = 75$, $\sigma = 6$.
In welchem Fach ist die Leistung relativ zur jeweiligen Verteilung besser?

Aufgabe 5: Rücktransformation

Eine Person hat einen z-Wert von 1.4. Der Mittelwert der Gruppe liegt bei 50 Punkten und die Standardabweichung bei 7 Punkten. Wie gross ist der Rohwert?

Aufgabe 6: Multiple Choice

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

- ❑ Ein z-Wert von 0 bedeutet, dass der Rohwert dem Mittelwert entspricht.
- ❑ Für eine Fläche oberhalb eines z-Wertes rechnet man $1 - P(Z \leq z)$.
- ❑ Zwei Rohwerte aus verschiedenen Verteilungen kann man immer direkt vergleichen.
- ❑ Ein z-Wert von 2 liegt zwei Standardabweichungen oberhalb des Mittelwerts.

10 Lösungen

Lösung 1

$$z = \frac{178 - 170}{8} = 1.00$$

$$P(X \leq 178) = P(Z \leq 1.00) = 0.8413$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 84.13%.

Lösung 2

$$z = \frac{47.5 - 40}{5} = 1.50$$

$$P(X > 47.5) = P(Z > 1.50) = 1 - P(Z \leq 1.50)$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 6.68%.

Lösung 3

$$z_1 = \frac{88 - 100}{12} = -1.00 \qquad z_2 = \frac{118 - 100}{12} = 1.50$$

$$P(88 \leq X \leq 118) = P(-1.00 \leq Z \leq 1.50)$$

$$= P(Z \leq 1.50) - P(Z \leq -1.00) = 0.9332 - 0.1587 = 0.7745$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 77.45%.

Lösung 4

$$z_{\text{Mathematik}} = \frac{78 - 70}{8} = 1.00$$

$$z_{\text{Deutsch}} = \frac{84 - 75}{6} = 1.50$$

Antwort: Die Leistung ist in Deutsch relativ besser, weil $z = 1.50$ grösser ist als $z = 1.00$.

Lösung 5

$$x = \mu + z \cdot \sigma = 50 + 1.4 \cdot 7 = 50 + 9.8 = 59.8$$

Antwort: Der Rohwert beträgt 59.8 Punkte.

Lösung 6

✓ Richtig – Ein z-Wert von 0 liegt genau beim Mittelwert.

✓ Richtig – Oberhalb bedeutet Gegenwahrscheinlichkeit zur linken Fläche.

✗ Falsch – Bei unterschiedlichen Verteilungen sollten zuerst z-Werte berechnet werden.

✓ Richtig – $z = 2$ bedeutet zwei Standardabweichungen oberhalb des Mittelwerts.