Korrelation: Signifikanztests

statistik-online.ch

Bei einer **Korrelation** kann man testen, ob ein beobachteter Korrelationskoeffizient statistisch bedeutsam ist. Besonders wichtig sind zwei Fälle: der Test gegen 0 und der Test gegen einen allgemeinen Referenzwert ρ_0.

1 Grundidee

Signifikanztests für Korrelationen prüfen, ob die beobachtete Korrelation stark genug ist, um H_0 zu verwerfen.

Dabei unterscheiden wir:

- **Test gegen 0:** Gibt es überhaupt einen linearen Zusammenhang?
- **Test gegen Referenzwert:** Unterscheidet sich die Korrelation von einem vorgegebenen Wert, zum Beispiel $\rho_0 = 0.30$?

Wichtig: In diesem Dokument wird ausschliesslich mit kritischen Werten entschieden. P-Werte werden nicht verwendet.

2 Stichprobe und Population

Symbol	Bedeutung
r	Korrelation in der Stichprobe
ρ	Korrelation in der Population
ρ_0	Referenzwert der Populationskorrelation
n	Stichprobengrösse

Der beobachtete Wert r ist nur eine Schätzung. Ein Signifikanztest prüft, ob dieser Wert gross genug ist, um eine Aussage über ρ zu machen.

3 Test einer Korrelation gegen 0

Dieser Test prüft, ob die Populationskorrelation von 0 verschieden ist.

Hypothesen

Zweiseitiger Test:

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

Inhaltlich:

- H_0: Es gibt keinen linearen Zusammenhang in der Population.
- H_1: Es gibt einen linearen Zusammenhang in der Population.

Teststatistik

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$df = n - 2$$

Entscheidungsregel

Bei einem zweiseitigen Test:

$$H_0 \text{ verwerfen, wenn } |t| > t_{krit}$$

Der kritische Wert t_{krit} wird mit $df = n - 2$ aus der t-Tabelle gelesen.

4 Test einer Korrelation gegen einen Referenzwert

Manchmal soll nicht gegen 0 getestet werden, sondern gegen einen bestimmten Referenzwert. Zum Beispiel:

$$\rho_0 = 0.30$$

Dann fragt man:

> Ist die beobachtete Korrelation deutlich anders als der Referenzwert?

Hypothesen

Zweiseitiger Test:

$$H_0 : \rho = \rho_0$$

$$H_1 : \rho \neq \rho_0$$

Warum Fisher-z-Transformation?

Der t-Test oben ist für den Spezialfall $\rho_0 = 0$. Für allgemeine Referenzwerte verwendet man die **Fisher-z-Transformation**.

$$z_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$z_{\rho_0} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)$$

$$z = (z_r - z_{\rho_0})\sqrt{n-3}$$

Entscheidungsregel

Bei einem zweiseitigen Test:

$$H_0 \text{ verwerfen, wenn } |z| > z_{krit}$$

Typische kritische z-Werte:

α	**zweiseitig**	**Entscheidung**
0.10	1.645	$\lvert z\rvert > 1.645$
0.05	1.960	$\lvert z\rvert > 1.960$
0.01	2.576	$\lvert z\rvert > 2.576$

5 Einseitige Tests

Einseitige Tests werden verwendet, wenn die Richtung vorher klar begründet ist.

Fragestellung	H_1	**Entscheidung**
Korrelation grösser als 0	$\rho > 0$	$t > t_{krit}$
Korrelation kleiner als 0	$\rho < 0$	$t < -t_{krit}$
Korrelation grösser als Referenzwert	$\rho > \rho_0$	$z > z_{krit}$
Korrelation kleiner als Referenzwert	$\rho < \rho_0$	$z < -z_{krit}$

Wenn die Richtung nicht vorher klar festgelegt wurde, verwendet man einen zweiseitigen Test.

6 Beispiel 1: Korrelation gegen 0 testen

In einer Studie mit $n = 30$ Personen wird der Zusammenhang zwischen Lernzeit und Prüfungspunkten untersucht. Es ergibt sich:

$$r = 0.46$$

Getestet wird zweiseitig mit $\alpha = 0.05$.

Hypothesen

$$H_0 : \rho = 0 \qquad H_1 : \rho \neq 0$$

Teststatistik

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.46\sqrt{\frac{30-2}{1-0.46^2}}$$

$$t = 0.46\sqrt{\frac{28}{0.7884}} = 2.74$$

$$df = n - 2 = 28$$

Bei $\alpha = 0.05$, zweiseitig, und $df = 28$ gilt:

$$t_{krit} = 2.048$$

$$|2.74| > 2.048$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Korrelation ist statistisch signifikant von 0 verschieden.

7 Beispiel 2: Korrelation gegen Referenzwert testen

In einer neuen Studie mit $n = 80$ Personen wird eine Korrelation von $r = 0.52$ gefunden. Man möchte testen, ob diese Korrelation von einem Referenzwert $\rho_0 = 0.30$ abweicht. Getestet wird zweiseitig mit $\alpha = 0.05$.

Hypothesen

$$H_0 : \rho = 0.30 \qquad H_1 : \rho \neq 0.30$$

Fisher-z-Transformation

$$z_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.52}{1-0.52}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1.52}{0.48}\right) = 0.576$$

$$z_{\rho_0} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.30}{1-0.30}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1.30}{0.70}\right) = 0.310$$

$$z = (0.576 - 0.310)\sqrt{80-3} = 0.266\sqrt{77} = 2.33$$

Bei $\alpha = 0.05$, zweiseitig, gilt:

$$z_{krit} = 1.960$$

$$|2.33| > 1.960$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Korrelation unterscheidet sich statistisch signifikant vom Referenzwert 0.30.

8 Zusammenfassung

Test	H_0	**Statistik**	**Entscheidung**
gegen 0	$\rho = 0$	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$	$\lvert t\rvert > t_{krit}$
gegen ρ_0	$\rho = \rho_0$	Fisher-z-Test	$\lvert z\rvert > z_{krit}$

Aufgaben: Korrelation Signifikanztests

1 – Korrelation gegen 0 testen

Eine Studie mit $n = 25$ Personen ergibt:

$$r = 0.40$$

Es gilt $\alpha = 0.05$, zweiseitig, $df = 23$ und $t_{krit} = 2.069$.

a) Formulieren Sie H_0 und H_1.

b) Berechnen Sie die Teststatistik.

c) Entscheiden Sie mit t_{krit}.

2 – Negative Korrelation gegen 0 testen

Eine Studie mit $n = 40$ Personen ergibt:

$$r = -0.35$$

Es gilt $\alpha = 0.05$, zweiseitig, $df = 38$ und $t_{krit} = 2.024$.

a) Berechnen Sie die Teststatistik.

b) Entscheiden Sie mit t_{krit}.

c) Interpretieren Sie das Ergebnis.

3 – Korrelation gegen Referenzwert testen

Eine Studie mit $n = 60$ Personen ergibt:

$$r = 0.48$$

Getestet wird gegen den Referenzwert:

$$\rho_0 = 0.25$$

Es gilt:

$$z_r = 0.523 \qquad z_{\rho_0} = 0.255 \qquad z_{krit} = 1.960$$

a) Formulieren Sie H_0 und H_1.

b) Berechnen Sie die Teststatistik z.

c) Entscheiden Sie mit z_{krit}.

4 – Multiple Choice

Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrfachantworten möglich)

- ❑ Der Test gegen 0 verwendet eine t-Teststatistik.
- ❑ Beim Test gegen einen Referenzwert verwendet man Fisher-z.
- ❑ Zweiseitig gilt: H_0 verwerfen, wenn $|t| > t_{krit}$.
- ❑ Eine signifikante Korrelation beweist Kausalität.
- ❑ Beim Test gegen ρ_0 wird H_0 verworfen, wenn $|z| > z_{krit}$.

Lösungen: Korrelation Signifikanztests

Lösung zu Aufgabe 1

$$H_0 : \rho = 0 \qquad H_1 : \rho \neq 0$$

$$t = 0.40\sqrt{\frac{25-2}{1-0.40^2}} = 0.40\sqrt{\frac{23}{0.84}} = 2.09$$

$$|2.09| > 2.069$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Korrelation ist statistisch signifikant von 0 verschieden.

Lösung zu Aufgabe 2

$$t = -0.35\sqrt{\frac{40-2}{1-(-0.35)^2}} = -0.35\sqrt{\frac{38}{0.8775}} = -2.30$$

$$|-2.30| > 2.024$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Korrelation ist statistisch signifikant von 0 verschieden. Inhaltlich liegt ein negativer linearer Zusammenhang vor.

Lösung zu Aufgabe 3

$$H_0 : \rho = 0.25 \qquad H_1 : \rho \neq 0.25$$

$$z = (z_r - z_{\rho_0})\sqrt{n-3} = (0.523 - 0.255)\sqrt{60-3}$$

$$z = 0.268\sqrt{57} = 2.02$$

$$|2.02| > 1.960$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Korrelation unterscheidet sich statistisch signifikant vom Referenzwert 0.25.

Lösung zu Aufgabe 4

✓ Richtig – Der Test gegen 0 verwendet eine t-Teststatistik.

✓ Richtig – Gegen allgemeine Referenzwerte verwendet man Fisher-z.

✓ Richtig – Beim zweiseitigen t-Test entscheidet man mit $|t|$.

✗ Falsch – Korrelation beweist keine Kausalität.

✓ Richtig – Beim Referenzwert-Test entscheidet man mit $|z|$.