

Nichtlineare Regression

statistik-online.ch

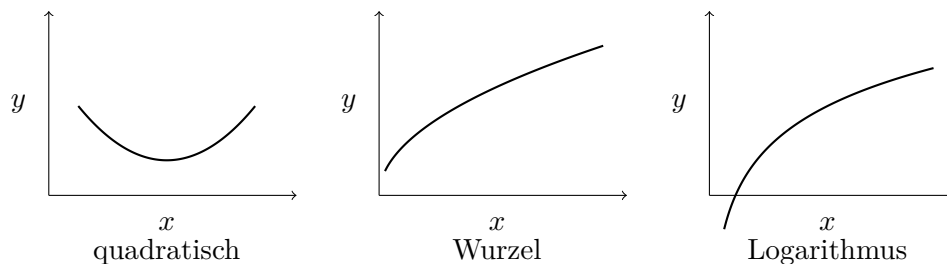
Die **nichtlineare Regression** beschreibt Zusammenhänge, die nicht gut durch eine Gerade dargestellt werden können. Häufig verwendet man dafür eine normale lineare Regression, erweitert das Modell aber um transformierte Variablen wie x^2 , $\sqrt{x}$ oder $\ln(x)$.

1 Grundidee

Nichtlinear bedeutet: Der Zusammenhang zwischen x und y ist nicht gerade, sondern gekrümmt.

Typische Fragen sind:

- Steigt y am Anfang stark und später nur noch wenig?
- Gibt es einen Wendepunkt oder ein Maximum?
- Wird der Effekt von x bei grösseren Werten stärker oder schwächer?
- Passt eine Gerade schlecht zu den beobachteten Daten?



2 Wichtig: Nichtlinear in x , aber linear in den Koeffizienten

Viele nichtlineare Zusammenhänge können trotzdem mit einer linearen Regression geschätzt werden. Der Grund ist: Die Koeffizienten stehen weiterhin linear im Modell.

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

Das Modell ist nichtlinear in x , weil x^2 vorkommt. Es ist aber linear in den Koeffizienten b_0 , b_1 und b_2 .

3 Quadratischer Term: x^2

Ein quadratischer Term wird verwendet, wenn der Zusammenhang gekrümmt ist. Das Modell lautet zum Beispiel:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

Der Term x^2 erlaubt eine Kurve. Dadurch kann das Modell einen U-förmigen oder umgekehrt U-förmigen Zusammenhang darstellen.

Vorzeichen von b_2	Form der Kurve
$b_2 > 0$	U-förmig
$b_2 < 0$	umgekehrt U-förmig

Beispiel: Der Zusammenhang zwischen Stress und Leistung kann umgekehrt U-förmig sein. Bei wenig Stress ist die Leistung niedrig, bei mittlerem Stress hoch und bei sehr viel Stress wieder niedriger.

4 Wurzel-Transformation: $\sqrt{x}$

Eine Wurzel-Transformation eignet sich, wenn der Effekt am Anfang stark ist, später aber immer kleiner wird.

$$\hat{y} = b_0 + b_1\sqrt{x}$$

Beispiel: Die ersten Lernstunden bringen oft eine grosse Verbesserung. Zusätzliche Lernstunden bringen danach zwar weiterhin etwas, aber der zusätzliche Gewinn wird kleiner.

Wichtig: $\sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert.

5 Logarithmus-Transformation: $\ln(x)$

Eine Logarithmus-Transformation eignet sich ebenfalls für Zusammenhänge mit abnehmendem Zuwachs. Das Modell lautet:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \ln(x)$$

Beispiel: Einkommen und Zufriedenheit: Zusätzliches Einkommen kann bei tiefem Einkommen einen grossen Unterschied machen. Bei hohem Einkommen ist der zusätzliche Effekt oft kleiner.

Wichtig: $\ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert.

6 Beispiel

Die Prüfungsleistung soll mit der Lernzeit vorhergesagt werden. Das Modell lautet:

$$\widehat{\text{Punkte}} = 42 + 8\sqrt{x}$$

x ist die Lernzeit in Stunden. Eine Person lernt $x = 9$ Stunden.

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\widehat{\text{Punkte}} = 42 + 8 \cdot 3 = 66$$

Antwort: Die vorhergesagte Punktzahl beträgt 66.

7 Interpretation

Bei nichtlinearen Modellen ist die Interpretation vorsichtiger als bei einer einfachen Gerade. Der Effekt von x ist nicht überall gleich gross.

Bei einer linearen Regression bedeutet b_1 :

Wenn x um 1 steigt, verändert sich $\hat{y}$ im Durchschnitt um b_1 .

Bei einem Modell mit x^2 , $\sqrt{x}$ oder $\ln(x)$ gilt das nicht mehr so direkt. Man interpretiert besser konkrete Vorhersagen für bestimmte x -Werte.

8 Modellvergleich

Ob eine Transformation sinnvoll ist, prüft man nicht nur mit Formeln, sondern auch inhaltlich und grafisch.

- Streudiagramm anschauen: Ist der Zusammenhang sichtbar gekrümmt?
- Residuen anschauen: Bleibt ein Muster in den Fehlern?
- Modelle vergleichen: Passt das transformierte Modell besser?
- Inhaltlich prüfen: Ergibt die Kurvenform fachlich Sinn?

Wichtig: Nichtlineare Modelle sollten nicht weit ausserhalb des beobachteten Datenbereichs extrapoliert werden. Kurven können dort schnell unrealistische Werte liefern.

9 Typische Transformationen

Transformation	Modell	Typische Verwendung
Quadratisch	$b_0 + b_1x + b_2x^2$	U-Form oder umgekehrte U-Form
Wurzel	$b_0 + b_1\sqrt{x}$	schneller Anfangseffekt, dann flacher
Logarithmus	$b_0 + b_1 \ln(x)$	abnehmender Zuwachs, $x > 0$
Polynom	$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$	stärker gekrümmte Verläufe

10 Aufgaben

Aufgabe 1: Vorhersage mit Wurzel

Ein Modell lautet:

$$\hat{y} = 30 + 5\sqrt{x}$$

Berechnen Sie die Vorhersage für $x = 16$.

Aufgabe 2: Vorhersage mit quadratischem Term

Ein Modell lautet:

$$\hat{y} = 10 + 4x - 0.5x^2$$

Berechnen Sie die Vorhersage für $x = 6$.

Aufgabe 3: Logarithmus-Modell

Ein Modell lautet:

$$\hat{y} = 20 + 3\ln(x)$$

Berechnen Sie die Vorhersage für $x = 10$. Verwenden Sie $\ln(10) \approx 2.303$.

Aufgabe 4: Transformation auswählen

Welche Transformation passt am ehesten?

Eine Variable steigt am Anfang stark an. Danach steigt sie weiter, aber immer langsamer.

Aufgabe 5: Multiple Choice

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

- ☐ Ein Modell mit x^2 kann eine gekrümmte Beziehung darstellen.
- ☐ $\ln(x)$ ist auch für negative Werte von x definiert.
- ☐ Bei nichtlinearen Modellen ist der Effekt von x oft nicht überall gleich gross.
- ☐ Nichtlineare Modelle sollte man vorsichtig ausserhalb des beobachteten Bereichs verwenden.

11 Lösungen

Lösung 1

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\hat{y} = 30 + 5 \cdot 4 = 50$$

Antwort: Die Vorhersage beträgt 50.

Lösung 2

$$\hat{y} = 10 + 4 \cdot 6 - 0.5 \cdot 6^2$$

$$= 10 + 24 - 0.5 \cdot 36 = 10 + 24 - 18 = 16$$

Antwort: Die Vorhersage beträgt 16.

Lösung 3

$$\hat{y} = 20 + 3 \ln(10)$$

$$\approx 20 + 3 \cdot 2.303 = 26.909$$

Antwort: Die Vorhersage beträgt ungefähr 26.91.

Lösung 4

Eine Wurzel-Transformation oder eine Logarithmus-Transformation passt gut. Beide können einen schnellen Anfangsanstieg und danach einen flacheren Verlauf darstellen.

Lösung 5

- ✓ Richtig – Ein quadratischer Term kann eine Kurve darstellen.
- ✗ Falsch – $\ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert.
- ✓ Richtig – Der Effekt von x kann je nach x -Wert unterschiedlich gross sein.
- ✓ Richtig – Extrapolation ist bei gekrümmten Modellen besonders heikel.