Ein-Stichproben-t-Test

statistik-online.ch

Der **Ein-Stichproben-t-Test** prüft, ob der Mittelwert einer Stichprobe von einem bekannten oder behaupteten Vergleichswert abweicht.

1 Grundidee

Wir vergleichen einen beobachteten Stichprobenmittelwert mit einem theoretischen Wert.

Typische Fragestellung

Eine Stichprobe liefert den Mittelwert $\bar{x}$. Wir möchten wissen, ob dieser Mittelwert mit einem vorgegebenen Wert μ_0 vereinbar ist.

- Ist die durchschnittliche Füllmenge einer Maschine wirklich 250 ml?
- Schlafen Studierende im Durchschnitt weniger als 7 Stunden?
- Weicht ein Testergebnis vom Normwert 100 ab?

Warum ein t-Test?

Der t-Test wird verwendet, wenn die Populationsstandardabweichung unbekannt ist und deshalb durch die Stichprobenstandardabweichung s geschätzt wird.

2 Hypothesen

Die Nullhypothese beschreibt den angenommenen Vergleichswert:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Die Alternativhypothese beschreibt, welche Abweichung untersucht wird:

zweiseitig:	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Abweichung in beide Richtungen
rechtsseitig:	$H_1 : \mu > \mu_0$	Mittelwert ist grösser
linksseitig:	$H_1 : \mu < \mu_0$	Mittelwert ist kleiner

3 Teststatistik

Die Teststatistik lautet:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

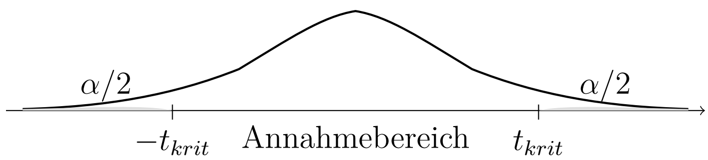
Symbol	**Bedeutung**
$\bar{x}$	Mittelwert der Stichprobe
μ_0	Vergleichswert aus der Nullhypothese
s	Standardabweichung der Stichprobe
n	Stichprobengrösse
$df = n - 1$	Freiheitsgrade

Je weiter der berechnete t-Wert von 0 entfernt ist, desto stärker spricht die Stichprobe gegen die Nullhypothese.

Entscheidungsregel

Die Entscheidung erfolgt durch den Vergleich des berechneten t-Werts mit dem kritischen t-Wert t_{krit}.

Testart	H_0 **verwerfen, wenn ...**	**Ablehnungsbereich**
zweiseitig	$\|t\| > t_{krit}$	links und rechts
rechtsseitig	$t > t_{krit}$	rechts
linksseitig	$t < -t_{krit}$	links



4 Voraussetzungen

- Die abhängige Variable ist metrisch.
- Die Beobachtungen sind unabhängig.
- Die Stichprobe stammt aus einer annähernd normalverteilten Population.
- Bei grösseren Stichproben ist der Test relativ robust gegenüber moderaten Abweichungen von der Normalverteilung.

5 Kritische t-Werte

Der kritische t-Wert hängt von drei Informationen ab:

- dem Signifikanzniveau α,
- der Testart (zweiseitig, rechtsseitig oder linksseitig),
- den Freiheitsgraden $df = n - 1$.

Bei einem zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ wird die Irrtumswahrscheinlichkeit auf beide Seiten der Verteilung aufgeteilt. Deshalb wird der kritische Wert aus der entsprechenden Spalte einer t-Tabelle abgelesen.

df	zweiseitig 5%	einseitig 5%	zweiseitig 1%
9	2.262	1.833	3.250
11	2.201	1.796	3.106
17	2.110	1.740	2.898
24	2.064	1.711	2.797

6 Beispiel

Eine Stichprobe von $n = 12$ Personen hat einen Mittelwert von $\bar{x} = 74.3$ und eine Standardabweichung von $s = 8.4$. Es soll geprüft werden, ob der Populationsmittelwert vom Vergleichswert $\mu_0 = 70$ abweicht. Es wird zweiseitig mit $\alpha = 0.05$ getestet.

$$H_0 : \mu = 70 \qquad H_1 : \mu \neq 70$$

$$t = \frac{74.3 - 70}{8.4/\sqrt{12}} = \frac{4.3}{2.42} = 1.77$$

Die Freiheitsgrade sind:

$$df = n - 1 = 11$$

Für einen zweiseitigen Test mit $df = 11$ liegt der kritische Wert ungefähr bei $t_{krit} = 2.201$. Da $|1.77| < 2.201$, wird H_0 nicht verworfen.

Interpretation: Die Stichprobe liefert keinen ausreichenden Hinweis darauf, dass der Mittelwert von 70 abweicht.

7 Zusammenfassung

Schritt	Frage	Formel oder Entscheidung
1	Hypothesen	$H_0 : \mu = \mu_0$
2	Standardfehler	$SE = s/\sqrt{n}$
3	Teststatistik	$t = (\bar{x} - \mu_0)/SE$
4	Freiheitsgrade	$df = n - 1$
5	Entscheidung	Vergleich mit t_{krit}

Aufgaben: Ein-Stichproben-t-Test

1 – Füllmenge

Eine Maschine soll Becher mit durchschnittlich 250 ml füllen. Eine Stichprobe von $n = 10$ Bechern ergibt $\bar{x} = 246.8$ ml und $s = 4.2$ ml. Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 0.05$, ob die durchschnittliche Füllmenge von 250 ml abweicht.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den t-Wert.
- Treffen Sie eine Entscheidung.

2 – Schlafdauer

Eine Studie untersucht, ob Studierende im Durchschnitt weniger als 7 Stunden schlafen. Für $n = 25$ Studierende gilt $\bar{x} = 6.6$ und $s = 1.1$. Testen Sie linksseitig mit $\alpha = 0.05$.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den t-Wert.
- Interpretieren Sie das Ergebnis.

3 – Kritischer t-Wert

Für eine Stichprobe mit $n = 18$, $\bar{x} = 102.5$ und $s = 9.0$ soll geprüft werden, ob der Mittelwert vom Vergleichswert $\mu_0 = 100$ abweicht. Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 0.05$.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den t-Wert.
- Bestimmen Sie t_{krit} und treffen Sie eine Entscheidung.

4 – Multiple Choice

Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrfachantworten möglich)

- ❑ Der Ein-Stichproben-t-Test vergleicht zwei unabhängige Gruppen.
- ❑ Die Freiheitsgrade betragen $n - 1$.
- ❑ Der Standardfehler ist $s/\sqrt{n}$.
- ❑ Bei einem zweiseitigen Test liegt die Ablehnungsregion auf beiden Seiten der Verteilung.
- ❑ Bei einem linksseitigen Test wird H_0 verworfen, wenn $t < -t_{krit}$.

Lösungen: Ein-Stichproben-t-Test

Lösung zu Aufgabe 1

$$H_0 : \mu = 250 \qquad H_1 : \mu \neq 250$$

$$t = \frac{246.8 - 250}{4.2/\sqrt{10}} = \frac{-3.2}{1.33} = -2.41$$

Die Freiheitsgrade sind $df = 9$. Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt ungefähr $t_{krit} = 2.262$.

$$|-2.41| > 2.262$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Stichprobe spricht dafür, dass die durchschnittliche Füllmenge von 250 ml abweicht.

Lösung zu Aufgabe 2

$$H_0 : \mu = 7 \qquad H_1 : \mu < 7$$

$$t = \frac{6.6 - 7}{1.1/\sqrt{25}} = \frac{-0.4}{0.22} = -1.82$$

Die Freiheitsgrade sind $df = 24$. Für einen linksseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ liegt der kritische Wert ungefähr bei -1.711.

$$-1.82 < -1.711$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Es gibt einen Hinweis darauf, dass Studierende im Durchschnitt weniger als 7 Stunden schlafen.

Lösung zu Aufgabe 3

$$H_0 : \mu = 100 \qquad H_1 : \mu \neq 100$$

Der Standardfehler ist:

$$SE = \frac{9.0}{\sqrt{18}} = 2.12$$

$$t = \frac{102.5 - 100}{9.0/\sqrt{18}} = \frac{2.5}{2.12} = 1.18$$

Die Freiheitsgrade sind $df = 17$. Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt ungefähr $t_{krit} = 2.110$.

$$|1.18| < 2.110$$

Entscheidung: H_0 wird nicht verworfen. Die Stichprobe liefert keinen ausreichenden Hinweis darauf, dass der Mittelwert von 100 abweicht.

Lösung zu Aufgabe 4

✗ Falsch – Der Ein-Stichproben-t-Test vergleicht einen Stichprobenmittelwert mit einem Vergleichswert.

✓ Richtig – Die Freiheitsgrade betragen $n - 1$.

✓ Richtig – Der Standardfehler ist $s/\sqrt{n}$.

✓ Richtig – Beim zweiseitigen Test gibt es zwei Ablehnungsregionen.

✓ Richtig – Bei einem linksseitigen Test wird H_0 verworfen, wenn $t < -t_{krit}$.