Ein-Stichproben-Z-Test

statistik-online.ch

Der **Ein-Stichproben-Z-Test** prüft, ob der Mittelwert einer Stichprobe von einem bekannten oder behaupteten Vergleichswert abweicht, wenn die Populationsstandardabweichung bekannt ist.

1 Grundidee

Wir vergleichen einen beobachteten Stichprobenmittelwert mit einem theoretischen Wert.

Typische Fragestellung

Eine Stichprobe liefert den Mittelwert $\bar{x}$. Wir möchten wissen, ob dieser Mittelwert mit einem vorgegebenen Wert μ_0 vereinbar ist.

- Ist die durchschnittliche Füllmenge einer Maschine wirklich 500 ml?
- Liegt der mittlere Blutdruck einer Gruppe über einem Referenzwert?
- Weicht ein Testergebnis vom Normwert 100 ab?

Warum ein Z-Test?

Der Z-Test wird verwendet, wenn die Populationsstandardabweichung σ bekannt ist. Der Standardfehler wird deshalb mit σ und nicht mit der Stichprobenstandardabweichung s berechnet.

2 Hypothesen

Die Nullhypothese beschreibt den angenommenen Vergleichswert:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Die Alternativhypothese beschreibt, welche Abweichung untersucht wird:

zweiseitig:	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Abweichung in beide Richtungen
rechtsseitig:	$H_1 : \mu > \mu_0$	Mittelwert ist grösser
linksseitig:	$H_1 : \mu < \mu_0$	Mittelwert ist kleiner

3 Teststatistik

Die Teststatistik lautet:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

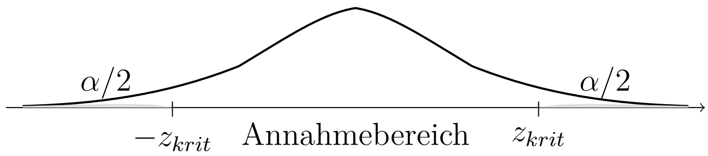
Symbol	Bedeutung
$\bar{x}$	Mittelwert der Stichprobe
μ_0	Vergleichswert aus der Nullhypothese
σ	bekannte Standardabweichung der Population
n	Stichprobengrösse
$\sigma/\sqrt{n}$	Standardfehler des Mittelwerts

Je weiter der berechnete z-Wert von 0 entfernt ist, desto stärker spricht die Stichprobe gegen die Nullhypothese.

Entscheidungsregel

Die Entscheidung erfolgt durch den Vergleich des berechneten z-Werts mit dem kritischen z-Wert z_{krit}.

Testart	H_0 verwerfen, wenn …	Ablehnungsbereich
zweiseitig	$\lvert z \rvert > z_{krit}$	links und rechts
rechtsseitig	$z > z_{krit}$	rechts
linksseitig	$z < -z_{krit}$	links



4 Voraussetzungen

- Die abhängige Variable ist metrisch.
- Die Beobachtungen sind unabhängig.
- Die Populationsstandardabweichung σ ist bekannt.
- Die Population ist normalverteilt oder die Stichprobe ist genügend gross.

5 Kritische z-Werte

Der kritische z-Wert hängt von zwei Informationen ab:

- dem Signifikanzniveau α,
- der Testart (zweiseitig, rechtsseitig oder linksseitig).

Bei einem zweiseitigen Test wird die Irrtumswahrscheinlichkeit auf beide Seiten der Verteilung aufgeteilt. Deshalb ist der kritische Wert grösser als bei einem einseitigen Test mit demselben α.

α	**zweiseitig**	**rechtsseitig**	**linksseitig**
0.10	1.645	1.282	-1.282
0.05	1.960	1.645	-1.645
0.01	2.576	2.326	-2.326

6 Beispiel

Eine Maschine soll Flaschen mit durchschnittlich 500 ml füllen. Die Populationsstandardabweichung ist bekannt und beträgt $\sigma = 12$ ml. Eine Stichprobe von $n = 36$ Flaschen ergibt $\bar{x} = 496.2$ ml. Es soll geprüft werden, ob die durchschnittliche Füllmenge vom Sollwert $\mu_0 = 500$ ml abweicht. Es wird zweiseitig mit $\alpha = 0.05$ getestet.

$$H_0 : \mu = 500 \qquad H_1 : \mu \neq 500$$

$$z = \frac{496.2 - 500}{12/\sqrt{36}} = \frac{-3.8}{2} = -1.90$$

Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt $z_{krit} = 1.960$. Da $|-1.90| < 1.960$, wird H_0 nicht verworfen.

Interpretation: Die Stichprobe liefert keinen ausreichenden Hinweis darauf, dass die durchschnittliche Füllmenge von 500 ml abweicht.

7 Zusammenfassung

Schritt	**Frage**	**Formel oder Entscheidung**
1	Hypothesen	$H_0 : \mu = \mu_0$
2	Standardfehler	$SE = \sigma/\sqrt{n}$
3	Teststatistik	$z = (\bar{x} - \mu_0)/SE$
4	Kritischer Wert	abhängig von α und Testart
5	Entscheidung	Vergleich mit z_{krit}

Aufgaben: Ein-Stichproben-Z-Test

1 – Füllmenge

Eine Maschine soll Becher mit durchschnittlich 250 ml füllen. Die bekannte Populationsstandardabweichung beträgt $\sigma = 5$ ml. Eine Stichprobe von $n = 64$ Bechern ergibt $\bar{x} = 248.6$ ml. Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 0.05$, ob die durchschnittliche Füllmenge von 250 ml abweicht.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den z-Wert.
- Treffen Sie eine Entscheidung mit z_{krit}.

2 – Blutdruck

Eine Studie untersucht, ob der mittlere systolische Blutdruck einer Gruppe grösser als 120 mmHg ist. Die bekannte Populationsstandardabweichung beträgt $\sigma = 15$. Für $n = 49$ Personen gilt $\bar{x} = 124.5$. Testen Sie rechtsseitig mit $\alpha = 0.05$.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den z-Wert.
- Interpretieren Sie das Ergebnis.

3 – Kritischer z-Wert

Für eine Stichprobe mit $n = 100$, $\bar{x} = 101.2$, $\sigma = 6.0$ und $\mu_0 = 100$ soll geprüft werden, ob der Mittelwert vom Vergleichswert abweicht. Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 0.05$.

- Formulieren Sie H_0 und H_1.
- Berechnen Sie den z-Wert.
- Bestimmen Sie z_{krit} und treffen Sie eine Entscheidung.

4 – Multiple Choice

Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrfachantworten möglich)

- ❑ Der Ein-Stichproben-Z-Test wird verwendet, wenn σ bekannt ist.
- ❑ Die Freiheitsgrade betragen $n - 1$.
- ❑ Der Standardfehler ist $\sigma/\sqrt{n}$.
- ❑ Bei einem zweiseitigen Test liegt die Ablehnungsregion auf beiden Seiten der Verteilung.
- ❑ Bei einem rechtsseitigen Test wird H_0 verworfen, wenn $z > z_{krit}$.

Lösungen: Ein-Stichproben-Z-Test

Lösung zu Aufgabe 1

$$H_0 : \mu = 250 \qquad H_1 : \mu \neq 250$$

$$z = \frac{248.6 - 250}{5/\sqrt{64}} = \frac{-1.4}{0.625} = -2.24$$

Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt $z_{krit} = 1.960$.

$$|-2.24| > 1.960$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Stichprobe spricht dafür, dass die durchschnittliche Füllmenge von 250 ml abweicht.

Lösung zu Aufgabe 2

$$H_0 : \mu = 120 \qquad H_1 : \mu > 120$$

$$z = \frac{124.5 - 120}{15/\sqrt{49}} = \frac{4.5}{2.14} = 2.10$$

Für einen rechtsseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt $z_{krit} = 1.645$.

$$2.10 > 1.645$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Es gibt einen Hinweis darauf, dass der mittlere Blutdruck grösser als 120 mmHg ist.

Lösung zu Aufgabe 3

$$H_0 : \mu = 100 \qquad H_1 : \mu \neq 100$$

Der Standardfehler ist:

$$SE = \frac{6.0}{\sqrt{100}} = 0.60$$

$$z = \frac{101.2 - 100}{6.0/\sqrt{100}} = \frac{1.2}{0.60} = 2.00$$

Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ gilt $z_{krit} = 1.960$.

$$|2.00| > 1.960$$

Entscheidung: H_0 wird verworfen. Die Stichprobe liefert einen Hinweis darauf, dass der Mittelwert von 100 abweicht.

Lösung zu Aufgabe 4

✓ Richtig – Der Z-Test setzt voraus, dass σ bekannt ist.

✗ Falsch – Beim Z-Test werden keine Freiheitsgrade benötigt.

✓ Richtig – Der Standardfehler ist $\sigma/\sqrt{n}$.

✓ Richtig – Beim zweiseitigen Test gibt es zwei Ablehnungsregionen.

✓ Richtig – Bei einem rechtsseitigen Test wird H_0 verworfen, wenn $z > z_{krit}$.